区分的定数関数に対する全変動流　(変分問題とその周辺)

黒田, 紘敏; 儀我, 義一

数理解析研究所講究録 1405 巻 2004 年 138-146

区分的定数関数に対する全変動流

北海道大学大学院理学研究科　黒田 紘敏 (Hirotoshi Kuroda)
儀我 義一 (Yoshikazu Giga)
Department of Mathematics, Hokkaido University

1．序文

$\Omega(\subset R^n)$ を有界領域とし，M を $\mathbb{R}^m$ に埋め込まれた境界のないなめらかなコンパクト多様体とする。写像 $u:\Omega\to R^m$ に対して，エネルギー $E_1(u)=\int_\Omega|\nabla u|dx$ を考える。u の値が M に制限されているという条件の下での $E_1(u)$ の勾配流は形式的には次のように表せる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\delta}{\delta u_M}E_1(u)=-P_u\Big(\frac{\delta E_1}{\delta u}(u)\Big)$$

ここで $v\in M$ に対して、$P_v:R^m\to \mathrm{T}_vM$ は直交射影である。この 1-調和写像流の初期値問題を解くことについて考える。

これまでに $n=1$ ならば，初期値が区分的定数の場合には，時間大域的な区分的定数な解の存在および一意性が示され (Giga - Kobayashi [1])，一般の次元 n で初期値 u_0 がリプシッツ条件を満たし，$\int_\Omega|\nabla u_0|\,dx$ が十分小さければ，局所解が存在することが示されている。(Giga - Kashima - Yamazaki [2]) また，ある初期条件のもとでは古典解は時間大域的とはなりえないことを６月の講演では発表した。(Giga - Kuroda[3])

ここでは，画像処理への応用という視点から特に $M=S^{m-1}$ ($m-1$ 次元単位球面) の場合に,「$\int_\Omega|\nabla u_0|\,dx$ が十分小さい」という仮定をつけずに解を構成することを目的とする。(特に $n=2,m=3$ の場合を中心に述べる。)

2．問題の定式化

前に述べた 1-調和写像流は

- $\nabla u=0$ となる点で方程式は特異性がある
- この特異性は強く u_t は u やその各点の微分からは決まらない

という難点がある。そこで，劣微分を用いて解の概念を定式化する。

これからは簡単のため $\Omega=\mathbb{T}^n$ とし，周期境界条件のもとで考える。

$H = L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^n))$ とし，写像 $\Phi_T : H \longrightarrow (-\infty, \infty]$ を

$$\Phi_T(u) = \begin{cases} \int_0^T (\int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u|)\, dt & u \in L^1(0, T; BV(\mathbb{T}^n)) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定める。

この Φ_T は H 上の適正, 凸, 下半連続な汎関数となる。$\partial\Phi_T$ をヒルベルト空間 H での劣微分とすると 1-調和写像流は

$$u_t \in -P_u(\partial\Phi_T(u)) \qquad u \in H$$

と表すことができる。

この発展方程式の解を求めるために次の近似問題を考える。

$H = L^2(\mathbb{T}^n)$ とし，H 上の汎関数 φ を次で定める。

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u| & u \in BV(\mathbb{T}^n) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらにこの φ を近似する関数として，区分的定数関数上の汎関数を用意する。

$\mathbb{T}^n$ の分割 $\Delta = \{\Omega_i\}_{i=1}^l$ を次のようにとる。

$$\mathbb{T}^n = \bigsqcup_{i=1}^{l} \Omega_i \ \text{(disjoint union)}, \ \text{特性関数}\ \chi_{\Omega_i} \in BV(\mathbb{T}^n)$$

ここで，disjoint union とは $\mathcal{L}^n(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0\ (i \neq j)$ の意味とする。

この分割 Δ に対して，$H = L^2(\mathbb{T}^n)$ の有限次元部分空間 H_Δ を次で定める。

$$H_\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^{l} a_i \chi_{\Omega_i} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R}^m \right\} \qquad \text{(階段関数全体)}$$

さらに，H 上の汎関数 φ_Δ を

$$\varphi_\Delta(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u| & u \in H_\Delta \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

におく。H_Δ は H の l 次元部分空間なので閉であるから φ_Δ も凸, 下半連続となる。この φ_Δ についての発展方程式を解き，分割を一様に細かくすることでその極限として局所解を構成したい。

3. 劣微分の計算

$u \in H_\Delta$ ならば $u = \sum_{i=1}^{l} a_i \chi_{\Omega_i}$ と表せる。ここで u はスカラー値とする。まず $n = 1$ のときの劣微分 $\partial\varphi_\Delta$ を実際に計算する。

階段関数 $u=\sum_{i=1}^{l} a_i\chi_{\Omega_i}\in H_\Delta(\mathbb{T}^1)$ に対して，$a_{l+1}=a_1$, $a_0=a_l$ のように約束すると

$$\varphi_\Delta(u)=\int_{\mathbb{T}^1}|\nabla u|=\sum_{i=1}^{l}|a_{i+1}-a_i|$$

であり， $u\notin H_\Delta$ ならば $\varphi_\Delta(u)=+\infty$ である。よって $f\in L^2(\mathbb{T}^1)$ に対して

$$f\in\partial\varphi_\Delta \Longleftrightarrow {}^\forall h\in H_\Delta\ ,\ \varphi_\Delta(u+h)-\varphi_\Delta(u)\geq\langle f,h\rangle$$

である。ここで $h=\sum_{i=1}^{l} h_i\chi_{\Omega_i}\in H_\Delta$ と表すと，右側の条件は

$$(\#)\qquad \sum_{i=1}^{l}(|a_{i+1}+h_{i+1}-a_i-h_i|-|a_{i+1}-a_i|)\geq\sum_{i=1}^{l}h_i\int_{\Omega_i}f\,dx$$

となる。従って， $f\in\varphi_\Delta$ であるためには，任意の $(h_1,\cdots,h_l)\in\mathbb{R}^l$ に対して上の不等式 (#) が成り立てばよい。

$f\in\partial\varphi_\Delta$ であるとすると，任意の $(h_1,\cdots,h_l)\in\mathbb{R}^l$ に対して不等式 (#) が成り立つ。特に $1\leq j\leq l$ に対して $h_i=0\ (i\neq j)$ とすると (#) より

$$|a_j+h_j-a_{j-1}|+|a_{j+1}-a_j-h_j|-|a_j-a_{j-1}|-|a_{j+1}-a_j|\geq h_j\int_{\Omega_j}f\,dx$$

が得られる。

$h_j>0$ のときには

$$\frac{|a_j-a_{j-1}+h_j|-|a_j-a_{j-1}|}{h_j}+\frac{|a_j-a_{j+1}+h_j|-|a_j-a_{j+1}|}{h_j}\geq\int_{\Omega_j}f\,dx$$

となるので

- $a_j\neq a_{j-1}$, $a_j\neq a_{j+1}$ のとき
  $h_j\longrightarrow+0$ として $(a_j-a_{j-1})/|a_j-a_{j-1}|+(a_j-a_{j+1})/|a_j-a_{j+1}|\geq\int_{\Omega_j}f\,dx$
- $a_j=a_{j-1}$, $a_j\neq a_{j+1}$ のとき
  $h_j\longrightarrow+0$ として $1+(a_j-a_{j+1})/|a_j-a_{j+1}|\geq\int_{\Omega_j}f\,dx$
- $a_j=a_{j-1}$, $a_j=a_{j+1}$ のとき
  $2\geq\int_{\Omega_j}f\,dx$

また $h_j < 0$ のときには

$$\frac{|a_j - a_{j-1} + h_j| - |a_j - a_{j-1}|}{h_j} + \frac{|a_j - a_{j+1} + h_j| - |a_j - a_{j+1}|}{h_j} \leq \int_{\Omega_j} f\, dx$$

となり

- $a_j \neq a_{j-1}$, $a_j \neq a_{j+1}$ のとき
  $h_j \longrightarrow -0$ として $(a_j - a_{j-1})/|a_j - a_{j-1}| + (a_j - a_{j+1})/|a_j - a_{j+1}| \leq \int_{\Omega_j} f\, dx$
- $a_j = a_{j-1}$, $a_j \neq a_{j+1}$ のとき
  $h_j \longrightarrow -0$ として $-1 + (a_j - a_{j+1})/|a_j - a_{j+1}| \leq \int_{\Omega_j} f\, dx$
- $a_j = a_{j-1}$, $a_j = a_{j+1}$ のとき
  $-2 \leq \int_{\Omega_j} f\, dx$

以下では $a_i = a_j$ のときには $(a_i - a_j)/|a_i - a_j|$ は閉区間 $[-1, 1]$ を表すものとし,

$$\frac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|} + \frac{a_k - a_l}{|a_k - a_l|}$$

のような表記はベクトル和と解釈することにすれば，すべての場合をまとめて

$$(\#)_1 \qquad \int_{\Omega_j} f\, dx = \frac{a_j - a_{j-1}}{|a_j - a_{j-1}|} + \frac{a_j - a_{j+1}}{|a_j - a_{j+1}|} \qquad (1 \leq j \leq l)$$

と表すことができる。

次に $1 \leq j \leq l$, $1 \leq k \leq l-2$ に対して,
$h = h_j = h_{j+1} = \cdots = h_{j+k}$, $h_i = 0$ (otherwise) とする。(#) より

$$|a_j + h - a_{j-1}| + |a_{j+k+1} - a_{j+k} - h| - |a_j - a_{j-1}| - |a_{j+k+1} - a_{j*k}| \geq h \sum_{i=j}^{j+k} \int_{\Omega_i} f\, dx$$

が得られる。前と同様にして

$$(\#)_2 \qquad \sum_{i=j}^{j+k} \int_{\Omega_i} f\, dx = \frac{a_j - a_{j-1}}{|a_j - a_{j-1}|} + \frac{a_{j+k} - a_{j+k+1}}{|a_{j+k} - a_{j+k+1}|}$$

と表せる。

最後に $h = h_1 = \cdots = h_l$ とすると (#) より

$$0 \geq h \sum_{i=1}^{l} \int_{\Omega_i} f\,dx = h \int_{\mathbb{T}^1} f\,dx$$

が得られるので

$$(\#)_3 \qquad \int_{\mathbb{T}^1} f\,dx = 0$$

が成り立つ。

これらの条件より

$$\sum_{i=1}^{l} (|a_{i+1} + h_{i+1} - a_i - h_i| - |a_{i+1} - a_i|) - \sum_{i=1}^{l} h_i \int_{\Omega_i} f\,dx$$

の最小値を求めてみる。そのために次の補題を用意する。

補題　$a_i, b \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$ とし

$$g(h) = \sum_{i=1}^{l} c_i |h - a_i| - bh \qquad h \in \mathbb{R}$$

とおく。このとき $|b| \leq \sum_{i=1}^{l} c_i$ ならば $g(h)$ は最小値をもち

$$\min_{h \in \mathbb{R}} g(h) = \min\{g(a_1), \cdots, g(a_l)\}$$

が成り立つ。

これは $g(h)$ が高々 1 次関数であることより明らかに成り立つ。

条件 $(\#)_2$ より，各変数 h_i に順番にこの補題が適用できて，
$h_i = a_l - a_i + h_l$ $(1 \leq i \leq l-1)$ のとき最小となり，このときの値は $(\#)_3$ より

$$-\sum_{i=1}^{l} |a_{i+1} - a_i| - \sum_{i=1}^{l-1} (a_l - a_i) \int_{\Omega_i} f\,dx - h_l \sum_{i=1}^{l} \int_{\Omega_i} f\,dx$$

を計算して $\int_{\mathbb{T}^1} uf\,dx - \varphi_\Delta(u)$ となることがわかる。これは 0 以上なので

$$(\#)_4 \qquad \int_{\mathbb{T}^1} uf\,dx \geq \varphi_\Delta(u)$$

が成り立つ。

これまでに見てきたことより，$f \in \partial\varphi_\Delta(u)$ ならば4つの条件 $(\#)_1$〜$(\#)_4$ が成立する。逆に $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$ が $(\#)_1$〜$(\#)_4$ を満たせば，同様の議論により $(\#)$ を満たす，すなわち $f \in \partial\varphi_\Delta(u)$ となることがわかる。よって

$$\partial\varphi_\Delta(u) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^1) |\ f \text{ は } (\#)_1 \sim (\#)_4 \text{を満たす}\}$$

これにより $n=1$ のときの劣微分は計算できたことになる。

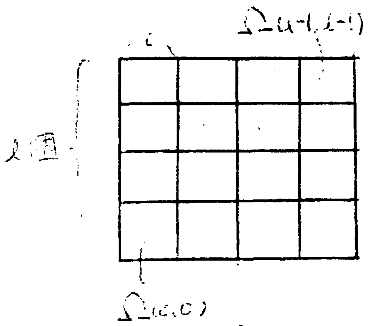
もしすべての a_i が異なっている，すなわち境界では必ず変動があるとすると $(\#)_2$〜$(\#)_4$ は $(\#)_1$ のみから導かれるので，劣微分 $\partial\varphi_\Delta(u)$ の記述は簡単になる。

次に $n=2$ のとき，$\mathbb{T}^2$ の分割 Δ を1辺 c の正方形 l^2 個とした場合の劣微分を計算する。

$A = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $B = \{\alpha \in A | |\alpha| = 1\}$, $B_+ = \{(1,0),(0,1)\}$

とおくと，$u \in H_\Delta$ は $u = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \chi_{\Omega_\alpha}$ と表せる。

このとき $\varphi_\Delta(u)$ は次のようになる。



$$\varphi_\Delta(u) = \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B_+} c|a_{\alpha+\beta} - a_\alpha|$$

$f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ が $f \in \partial\varphi_\Delta(u)$ となるためには

$\varphi_\Delta(u+h) - \varphi_\Delta(u) \geq \langle f, h\rangle$ ($^\forall h \in H_\Delta$) より

$$(\#)' \qquad \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B_+} c(|a_{\alpha+\beta} + h_{\alpha+\beta} - a_\alpha - h_\alpha| - |a_{\alpha+\beta} - a_\alpha|) \geq \sum_{\alpha\in A} h_\alpha \int_{\Omega_\alpha} f\,dx$$

を満たせばよい。

$n=1$ のときと同様に，$(\#)'$ において $h_\alpha = 0$ $(\alpha \neq \alpha_0)$ とすると

$$\sum_{\beta\in B} c(|a_{\alpha_0} + h_{\alpha_0} - a_{\alpha_0+\beta}| - |a_{\alpha_0} - a_{\alpha_0+\beta}|) \geq h_{\alpha_0} \int_{\Omega_\alpha} f\,dx$$

1次元のときと同じ記法を用いると，この不等式より

$$(\#)'_1 \qquad \int_{\Omega_{\alpha_0}} f\,dx = c\sum_{\beta\in B} \frac{a_{\alpha_0} - a_{\alpha_0+\beta}}{|a_{\alpha_0} - a_{\alpha_0+\beta}|}$$

が得られる。

次に $\Lambda \subset A$ を次の条件を満たすようにとる。

ある $\alpha_0 \in \Lambda$ が存在して，${}^\forall \alpha \in \Lambda$ に対して

${}^\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ s.t. Ω_{α_j} と $\Omega_{\alpha_{j+1}}$ は (少なくとも) 1 辺を共有する。
$(j = 0, 1, \cdots, k\ ,\ \alpha_{k+1} = \alpha)$

このとき $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \Omega_\alpha$ は essentially connected であると呼ぶことにする。また，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \Omega_\alpha$ の境界の辺の数を k_Λ とすると周長は $k_\Lambda c$ となる。

$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \Omega_\alpha$ は essentially connected であるとする。
$h_\alpha = h\ (\alpha \in \Lambda)$, $h_\alpha = 0\ (\alpha \notin \Lambda)$ とし，各 $\alpha \in \Lambda$ に対して $B_\alpha \subset B$ を

$$B_\alpha = \{\beta \in B |\ \alpha + \beta \notin \Lambda\}$$

とおくと $(\#)'$ より

$$c \sum_{\alpha\in\Lambda} \sum_{\beta\in B_\alpha} (|a_\alpha + h - a_{\alpha+\beta}| - |a_\alpha - a_{\alpha+\beta}|) \geq h \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{\Omega_\alpha} f\, dx$$

これより次の条件が得られる。

$$(\#)'_2 \qquad \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{\Omega_\alpha} f\, dx = c \sum_{\alpha\in\Lambda} \sum_{\beta\in B_\alpha} \frac{a_\alpha - a_{\alpha+\beta}}{|a_\alpha - a_{\alpha+\beta}|}$$

最後に $h = h_\alpha\ ({}^\forall \alpha \in A)$ とすると $(\#)'$ より

$$0 \geq h \sum_{\alpha\in A} \int_{\Omega_\alpha} f\, dx = h \int_{\mathbb{T}^2} f\, dx$$

が得られるので

$$(\#)'_3 \qquad \int_{\mathbb{T}^2} f\, dx = 0$$

が成り立つ。

これらの条件のもとで

$$\sum_{\alpha\in A\ \beta\in B_+} c(|a_{\alpha+\beta} + h_{\alpha+\beta} - a_\alpha - h_\alpha| - |a_{\alpha+\beta} - a_\alpha|) - \sum_{\alpha\in A} h_\alpha \int_{\Omega_\alpha} f\, dx$$

の最小値を求めると，$(\#)'_2$ において $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times B_\alpha$ となる組は k_Λ 個だから

$$\left| \sum_{\alpha\in\Lambda} \int_{\Omega_\alpha} f\, dx \right| \leq k_\Lambda c$$

が成り立つので補題が適用できて，値は $\int_{\mathbb{T}^2} uf\,dx - \varphi_\Delta(u)$ となる。
この値が 0 以上ならばよいので

$$(\#)_4' \qquad \int_{\mathbb{T}^2} uf\,dx \geq \varphi_\Delta(u)$$

逆に $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ が条件 $(\#)_1' \sim (\#)_4'$ を満たすならば $f \in \partial\varphi_\Delta(u)$ であることもわかる。よってこの場合も劣微分が計算できたことになる。

一般の次元の (正方形分割とは限らない) 分割の場合にも essentially connected の概念を適当に拡張すれば，ほぼ同様の条件により劣微分を特徴づけすることができるがここでは省略する。ベクトル値の場合にも同様な結果が得られると思うが，まだ完全な計算はしていない。

4．近似問題との関係

ここでは $n=2$ の場合について考察する。主に今後の展望について述べたい。$\mathbb{T}^2$ の正方形分割を 1 つ固定し，その 1 辺の長さを c とする。

$0 < \varepsilon < 1$ に対して，汎関数 φ_Δ の近似として

$$E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha\in A\ \beta\in B_+} c\sqrt{|a_{\alpha+\beta} - a_\alpha|^2 + \varepsilon^2} & u \in H_\Delta \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

を考える。この E_ε は正方形分割の境界すべてで変動があるので劣微分が簡単に計算でき，

$f \in \partial E_\varepsilon(u)$ となるのは

$$\int_{\Omega_\alpha} f\,dx = c\sum_{\beta\in B} \frac{a_\alpha - a_{\alpha+\beta}}{\sqrt{|a_\alpha - a_{\alpha+\beta}|^2 + \varepsilon^2}}$$

となるときである。さらに $\partial E_\varepsilon(u)$ の元で L^2 ノルムを最小にするような f は，$|\Omega_\alpha| = c^2$ であるから

$$f\chi_\alpha = c^{-1}\sum_{\beta\in B} \frac{a_\alpha - a_{\alpha+\beta}}{\sqrt{|a_\alpha - a_{\alpha+\beta}|^2 + \varepsilon^2}}$$

となる区分的定数関数が劣微分 $\partial E_\varepsilon(u)$ に属するならばこれである。

最終的には分割は細かくしたいのであるが，ここでは分割は固定して区分的定数の範囲で考える。

この $E_\varepsilon(u)$ について

$$\begin{cases} \partial_t u \in -P_u(\partial E_\varepsilon(u)) & t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_\Delta & u_0(x) \in S^2 \end{cases}$$

という方程式を解くことになるが，u が区分的定数関数なので $u = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \chi_{\Omega_\alpha}$ とおくと，各分割 Ω_α における定数である t についての関数 a_α に関する連立常微分方程式が得られる。これら a_α は2次元単位球面に値を持つので，S^2 のコンパクト性よりこの連立常微分方程式は大域的に解けると考えている。

このときに ε についての $\partial E_\varepsilon(u)$ の L^2 有界性も示せそうなので，上の常微分方程式の解が $\varepsilon \to 0$ としたときに1-調和写像流の解に収束すると証明されれば，(区分的定数な) 大域解が構成できたことになる。現在，これらの点を研究中である。

参考文献

[1] Y.Giga and R.Kobayashi, On constrained equations with singular diffusivity, Methods and Applications analysis, **10**(2003), 253-278.

[2] Y. Giga, Y. Kashima and N. Yamazaki, Local solvability of a constrained gradient system of total variation, Abstract and Applied Analysis, to appear.

[3] Y. Giga and H. Kuroda, On breakdown of solutions of a constrained gradient system of total variation, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, **22**(2004), 1-12.